

総合問題

1 ※問題文は、教科書 231 ページを参照。

指針 不等式の証明のくふう

- (1) 判別式を利用する。
 (2) 与えられた不等式の左辺を展開して x について整理し、(1) の結果を利用する。

- (3) (2) で示した不等式において、 $a_1=x$, $a_2=y$, $a_3=z$, $b_1=\frac{1}{x}$, $b_2=\frac{1}{y}$,

$$b_3=\frac{1}{z} \text{ とする。}$$

- (4) (2) で示した不等式において、 $a_1=\frac{p}{\sqrt{s}}$, $a_2=\frac{q}{\sqrt{t}}$, $a_3=\frac{r}{\sqrt{u}}$, $b_1=\sqrt{s}$,
 $b_2=\sqrt{t}$, $b_3=\sqrt{u}$ とする。

- (5) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ が成り立つことを利用する。

解答 (1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

$$D=b^2-4ac$$

2 次不等式の x^2 の係数が正であるから、すべての実数 x で不等式が成り立つのは、 $D \leq 0$ のときである。

$$\text{よって } b^2-4ac \leq 0 \quad \text{答}$$

- (2) すべての実数 x に対して

$$(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+(a_3x+b_3)^2 \geq 0$$

が成り立つことから、2 次不等式

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)x+(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geq 0$$

がすべての実数 x で成り立つ。

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2, 2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3), b_1^2+b_2^2+b_3^2 \text{ は正の実数であるから,}$$

(1)において,

$$a=a_1^2+a_2^2+a_3^2, b=2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3), c=b_1^2+b_2^2+b_3^2 \text{ とすると}$$

$$\{2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\}^2-4(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \leq 0$$

すなわち

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \quad \text{答}$$

- (3) $x, y, z, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ は正の実数であるから、(2) で示した不等式において,

$$a_1=x, a_2=y, a_3=z, b_1=\frac{1}{x}, b_2=\frac{1}{y}, b_3=\frac{1}{z} \text{ とすると}$$

$$(x^2+y^2+z^2)\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^2\right\} \geq \left(x \cdot \frac{1}{x}+y \cdot \frac{1}{y}+z \cdot \frac{1}{z}\right)^2$$

$$\text{すなわち } (x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right) \geq 9 \quad \text{答}$$

- (4) $\frac{p}{\sqrt{s}}, \frac{q}{\sqrt{t}}, \frac{r}{\sqrt{u}}, \sqrt{s}, \sqrt{t}, \sqrt{u}$ は正の実数であるから, (2) で示した不等式において, $a_1 = \frac{p}{\sqrt{s}}, a_2 = \frac{q}{\sqrt{t}}, a_3 = \frac{r}{\sqrt{u}}, b_1 = \sqrt{s}, b_2 = \sqrt{t}, b_3 = \sqrt{u}$ とすると

$$\left\{ \left(\frac{p}{\sqrt{s}} \right)^2 + \left(\frac{q}{\sqrt{t}} \right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{u}} \right)^2 \right\} \{ (\sqrt{s})^2 + (\sqrt{t})^2 + (\sqrt{u})^2 \} \\ \geq \left(\frac{p}{\sqrt{s}} \cdot \sqrt{s} + \frac{q}{\sqrt{t}} \cdot \sqrt{t} + \frac{r}{\sqrt{u}} \cdot \sqrt{u} \right)^2$$

すなわち $\frac{p^2}{s} + \frac{q^2}{t} + \frac{r^2}{u} \geq \frac{(p+q+r)^2}{s+t+u}$ 終

(5) $\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ba} + \frac{c^2}{ca+cb} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$

から $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}$

ここで

$$(a^2+b^2+c^2) - (ab+bc+ca) = \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0$$

より, $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ であるから

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}$$

すなわち $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ 終

2 ※問題文は, 教科書 232 ページを参照。

指針 3 次式で割った余り $P(x)$ を 3 次式 $(x+1)^2(x-1)$ で割った余りは 2 次以下の多項式か 0 であるから, 余りは ax^2+bx+c とおける。

余りの条件と剰余の定理から $P(-1), P(1)$ について考えると, $b=5, c=2-a$ が得られるが, a の値を定めることができないから, $(x+1)^2$ で割った余りに着目して a の値を求める。

解答 (1) 多項式 $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りが $x-2$ であるから, 商を $Q_1(x)$ とすると, 次の等式が成り立つ。

$$P(x) = (x+1)^2 Q_1(x) + x - 2$$

この等式から $P(-1) = -1 - 2 = -3$

答 (ア) -3

(2) (*) から $P(-1) = a - b + c, P(1) = a + b + c$

また, $P(-1) = -3, P(1) = 7$ であるから

$$a - b + c = -3, a + b + c = 7$$

これを解くと $b = 5, c = 2 - a$

よって, 求める余り $ax^2 + bx + c$ を, a と x だけを用いて $ax^2 + 5x + 2 - a$ と

表すことができる。

$$P(x) = (x+1)^2(x-1)Q(x) + ax^2 + 5x + 2 - a \quad \cdots \cdots (*)'$$

ここで、 $(*)'$ から $P(x)$ を $x-1$ で割った余りと $x+1$ で割った余りは求められるが、 $(x+1)^2$ で割った余りは求められないことに着目する。

$$\begin{array}{r} a \\ x^2+2x+1 \overline{) ax^2+5x+2-a} \\ \underline{ax^2+2ax+a} \\ (5-2a)x+(2-2a) \end{array}$$

上の計算により、 $(*)'$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)^2(x-1)Q(x) + a(x+1)^2 + (5-2a)x + (2-2a) \\ &= (x+1)^2\{(x-1)Q(x) + a\} + (5-2a)x + (2-2a) \end{aligned}$$

$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りは $x-2$ であることから

$$5-2a=1, \quad 2-2a=-2 \quad \text{よって} \quad a=2$$

したがって、 $P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)$ で割った余りは

$$2x^2+5x$$

答 (イ) $ax^2+5x+2-a$

(ウ), (エ) $x-1, x+1$ (順不同)

(オ) $(x+1)^2$ (カ) $2x^2+5x$

3 ※問題文は、教科書 233 ページを参照。

指針 領域と最大・最小の応用

(3) (1), (2) の条件を領域として図示し、商品 A, B の合計の個数である $x+y$ の値の最小値を考える。

(4) 商品 A, B の値段は同じであるから、 $x+y$ が最小値をとるとき合計購入金額が最も少なくなる。

解答 (1) $2x+5y \geq 200$ **答**

(2) $7x+3y \geq 420$ **答**

(3) 与えられた条件から

$$x \geq 0, y \geq 0, 2x+5y \geq 200, 7x+3y \geq 420$$

が成り立つ。

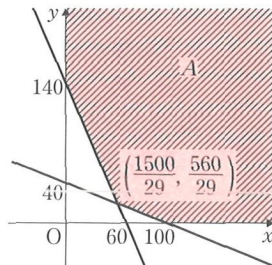
直線 $2x+5y=200$ と

直線 $7x+3y=420$ の交点の座標は

$$\left(\frac{1500}{29}, \frac{560}{29} \right)$$

よって、この連立不等式が満たす領域 A は右の図のようになる。

2つの商品 A, B の合計購入個数を k 個とすると



$$x+y=k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。これは傾きが -1 、 y 切片が k である直線を表す。領域 A においては、直線 $\textcircled{1}$ が点 $\left(\frac{1500}{29}, \frac{560}{29}\right)$ を通るとき k は最小で、そのとき

$$k = \frac{1500}{29} + \frac{560}{29} = \frac{2060}{29} = 71.03\cdots$$

k は整数であるから、2つの商品 A、B を最低でも合計で 72 個以上 購入する必要がある。 答

(4) $x+y=72$ のとき

$$y=72-x$$

(1) から

$$2x+5(72-x) \geq 200$$

$$\text{すなわち } x \leq 53.3\cdots$$

(2) から

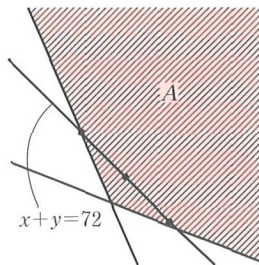
$$7x+3(72-x) \geq 420$$

$$\text{すなわち } x \geq 51$$

$51 \leq x \leq 53.3\cdots$ で、 x は整数であることから、

2つの商品 A、B の合計購入金額が最も少なくなるような (x, y) の組は

$$(x, y) = (51, 21), (52, 20), (53, 19) \quad \text{答}$$



4 ※問題文は、教科書 233 ページを参照。

指針 正五角形の 1 辺の長さ

(1) $\theta = \frac{2}{5}\pi$ より、 $5\theta = 2\pi$ であるから $2\theta = 2\pi - 3\theta$

(3) (1), (2) より、 t についての 3 次方程式を作る。

(4) 余弦定理を利用する。

解答 (1) $\theta = \frac{2}{5}\pi$ であるから $5\theta = 2\pi$

$$2\theta + 3\theta = 2\pi \text{ から } 2\theta = 2\pi - 3\theta$$

$$\text{よって } \cos 2\theta = \cos(2\pi - 3\theta) = \cos 3\theta \quad \text{終}$$

(2) $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$

$$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$$

$$= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta$$

$$= (2\cos^2 \theta - 1)\cos \theta - 2\sin^2 \theta \cos \theta$$

$$= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta)\cos \theta$$

$$= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$

よって、 $t = \cos \theta$ とすると

$$\cos 2\theta = 2t^2 - 1, \quad \cos 3\theta = 4t^3 - 3t \quad \text{答}$$

また, $0 < \frac{2}{5}\pi < \frac{\pi}{2}$ から

$$\cos \frac{\pi}{2} < \cos \frac{2}{5}\pi < \cos 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < t < 1 \quad \text{終}$$

(3) (1), (2) から $2t^2 - 1 = 4t^3 - 3t$

すなわち $4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0$

左辺を因数分解すると $(t-1)(4t^2+2t-1)=0$

よって $t=1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$0 < t < 1$ であるから $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ 答

(4) (3) から

$$\cos \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$\triangle OAB$ において, 余弦定理により

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cos \theta$$

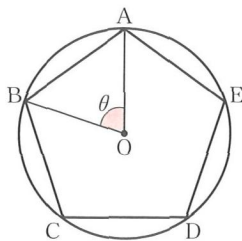
$$= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

$AB > 0$ から $AB = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$

よって, 正五角形 $ABCDE$ の 1 辺の長さは

$$\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} \quad \text{答}$$



別解 (1) $\theta = \frac{2}{5}\pi$ であるから

$$\cos 2\theta = \cos \frac{4}{5}\pi = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{5} \right) = -\cos \frac{\pi}{5}$$

$$\cos 3\theta = \cos \frac{6}{5}\pi = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{5} \right) = -\cos \frac{\pi}{5}$$

よって $\cos 2\theta = \cos 3\theta$ 終

5 ※問題文は, 教科書 234 ページを参照。

指針 常用対数の利用

(2) 不等式 ① の両辺の常用対数をとる。

(3) $p=7.2$ のとき, $x=1+\frac{7.2}{100}=1.072$ であるから, $1.072^{10} \geq 2$ が成り立つこ

とを示す。

解答 (1) $p=10$ のとき, 計画通りに利益が増えたとすると, 3 年後の利益は

$$\begin{aligned}
 1000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 &= 1000 \times 1.1^3 \\
 &= 1000 \times 1.331 \\
 &= 1331
 \end{aligned}$$

よって、1331 万円 である。 ㊦

- (2) 計画通りに利益が増えたかすると、1 年後の利益は $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ 倍になる。

$x = 1 + \frac{p}{100}$ とすると、10 年間で利益が 2 倍以上になるとき、不等式

$$x^{10} \geq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。① の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} x^{10} \geq \log_{10} 2$$

すなわち $10 \log_{10} x \geq \log_{10} 2$

ここで、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とすると

$$\log_{10} x \geq \frac{1}{10} \log_{10} 2 = 0.03010$$

すなわち $\log_{10} \left(1 + \frac{p}{100}\right) \geq 0.03010 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

常用対数表から

$$\log_{10} 1.07 = 0.0294, \quad \log_{10} 1.08 = 0.0334$$

であるから、② を満たす最小の自然数 p は

$$1 + \frac{p}{100} = 1.08 \quad \text{すなわち} \quad p = 8$$

㊦ (ア) $1 + \frac{p}{100}$ (イ) 10 (ウ) 0.03010 (エ) 8

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \log_{10} 1.072^{10} &= 10 \log_{10} \frac{5.36}{5} \\
 &= 10(\log_{10} 5.36 - \log_{10} 5) \\
 &= 10(0.7292 - 0.6990) \\
 &= 0.302
 \end{aligned}$$

$$\log_{10} 2 = 0.3010 \text{ であるから} \quad \log_{10} 1.072^{10} > \log_{10} 2$$

$$\text{底 } 10 \text{ は } 1 \text{ より大きいから} \quad 1.072^{10} > 2$$

よって、目標を達成するためには $p = 7.2$ で十分である。 ㊦

6 ※問題文は、教科書 235 ページを参照。

指針 極大値と極小値をもつ 3 次関数のグラフの性質

- (2) 方程式 $x^3 - 3a^2x = k$ が異なる 2 つの実数解をもつのは、

関数 $y = x^3 - 3a^2x$ のグラフと直線 $y = k$ が異なる 2 つの共有点をもつときである。

- (5) 傾きが正である接線の方程式を $y=mx+n$ とおき、関数 $y=x^3-3b^2x$ のグラフと異なる2つの点を共有することから、(3)で示した式を利用する。

解答 (1) $y'=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$$y'=0 \text{ とすると } x=-a, a$$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	極大 $2a^3$	$\searrow$	極小 $-2a^3$	$\nearrow$

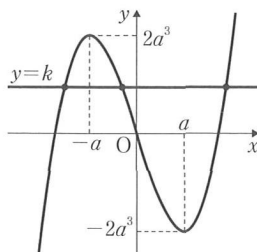
よって、この関数は $x=-a$ で極大値 $2a^3$ 、 $x=a$ で極小値 $-2a^3$ をとる。

答

- (2) この方程式の異なる実数解の個数は、関数 $y=x^3-3a^2x$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数に等しい。

(1) から、関数 $y=x^3-3a^2x$ のグラフは、右の図のようになる。

求める k の値は、このグラフと直線 $y=k$ が異なる2つの共有点をもつときの値であるから



$$k=-2a^3, 2a^3 \quad \text{答}$$

- (3) まず、方程式 $x^3-3a^2x=k_1$ の実数解を求める。

(2) より $k_1=-2a^3$ であるから

$$x^3-3a^2x=-2a^3 \quad \text{すなわち} \quad x^3-3a^2x+2a^3=0$$

左辺を因数分解すると $(x-a)^2(x+2a)=0$

$$\text{よって} \quad \alpha_1=-2a, \beta_1=a \quad \cdots \cdots \text{①}$$

次に、方程式 $x^3-3a^2x=k_2$ の実数解を求める。

(2) より $k_2=2a^3$ であるから

$$x^3-3a^2x=2a^3 \quad \text{すなわち} \quad x^3-3a^2x-2a^3=0$$

左辺を因数分解すると $(x+a)^2(x-2a)=0$

$$\text{よって} \quad \alpha_2=-a, \beta_2=2a \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{①, ② から} \quad \alpha_1=2\alpha_2, 2\beta_1=\beta_2 \quad \text{答}$$

- (4) $y=x^3-3b^2x$ を微分すると $y'=3x^2-3b^2$

接線の傾きが m となる接点の座標を (t, t^3-3b^2t) とすると

$$3t^2-3b^2=m \quad \text{すなわち} \quad t^2=\frac{m+3b^2}{3}$$

ここで、 $\frac{m+3b^2}{3}$ は正の実数であるから

$$t = \pm \sqrt{\frac{m+3b^2}{3}}$$

よって、接線の傾きが m となる接点が 2 つ存在することから、関数 $y = x^3 - 3b^2x$ のグラフには、傾き m の接線が 2 本引ける。 

(5) 傾きが正である接線の方程式を $y = mx + n$ とおく。

この接線と関数 $y = x^3 - 3b^2x$ のグラフの共有点の x 座標は方程式 $x^3 - 3b^2x = mx + n$ すなわち $x^3 - (3b^2 + m)x = n$ の 2 つの実数解である。

ここで、 $3b^2 + m$ は正の実数であることから、 a を $3b^2 + m = 3a^2$ を満たす正の実数とすると、(2)より $n = -2a^3, 2a^3$

$x^3 - 3a^2x = -2a^3$ の実数解を $\alpha_1, \beta_1 (\alpha_1 < \beta_1)$,

$x^3 - 3a^2x = 2a^3$ の実数解を $\alpha_2, \beta_2 (\alpha_2 < \beta_2)$

とすると、①, ② から

$$SP = \alpha_2 - \alpha_1 = -a - (-2a) = a$$

$$PO = 0 - \alpha_2 = -(-a) = a$$

$$OQ = \beta_1 - 0 = a$$

$$QR = \beta_2 - \beta_1 = 2a - a = a$$

したがって、 $SP = PO = OQ = QR$ が成り立つから、3 点 P, O, Q は線分 SR を 4 等分する点である。 